Exercice ❶ :

a) $x^2+3x+2=(x+2)\cdot(x+1)=0$ Donc $x=-1$ et $x=-2$ sont les deux solutions : $\underline{\underline{S=\{-2\,;-1\}}}$

b) $x^2+4x+3=(x+3)\cdot(x+1)=0$ Donc $x=-1$ et $x=-3$ sont les deux solutions : $\underline{\underline{S=\{-3\,;-1\}}}$

c) $x^2+8x+5=0;\quad a=1;\ b=8;\ c=5;\quad \Delta=8^2-4\cdot5=44;\quad x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=-4\pm\sqrt{11}$

$x=\dfrac{-8\pm\sqrt{44}}{2}=\dfrac{-8}{2}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt{11}}{2}=-4\pm\sqrt{11}.\quad \underline{\underline{S=\left\{-4-\sqrt{11}\,;-4+\sqrt{11}\right\}}}$

d) $x^2-x-1=0;\quad a=1;\ b=-1;\ c=-1;\quad \Delta=1^2+4=5;\quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}$

e) $x^2+7x+3=0;\quad a=1;\ b=7;\ c=3;\quad \Delta=7^2-4\cdot3=37$.

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{37}}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-7-\sqrt{37}}{2};\dfrac{-7+\sqrt{37}}{2}\right\}}}$

f) $x^2-4x+6=0;\quad a=1;\ b=-4;\ c=6;\quad \Delta=4^2-4\cdot6=-8<0$ donc il n'y a pas de solution. $\underline{\underline{S=\varnothing}}$

g) $2x^2+5x+1=0;\quad a=2;\ b=5;\ c=1;\quad \Delta=5^2-4\cdot2=17$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{4}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{17}}{4};\dfrac{-5+\sqrt{17}}{4}\right\}}}$

h) $2x^2-5x+3=0;\quad a=2;\ b=5-;\ c=3;\quad \Delta=5^2-4\cdot2\cdot3=1$

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{4}.\ ;\quad S=\left\{\dfrac{5-1}{4};\dfrac{5+1}{4}\right\}=\left\{\dfrac{4}{4};\dfrac{6}{4}\right\}\ ;\quad \underline{\underline{S=\{\,1\,;1{,}5\,\}}}$

On aurait aussi pu factoriser : $2x^2-5x+3=(2x-3)\cdot(x-1)$.

i) $2x^2+4x+1=0;\quad a=2;\ b=4;\ c=1;\quad \Delta=4^2-4\cdot2=8$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{4}=\dfrac{-4}{4}\pm\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{4}=-1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\quad \underline{\underline{S=\left\{-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}}$

j) $3x^2+5x+1=0;\quad a=3;\ b=5;\ c=1;\quad \Delta=5^2-4\cdot3=13$

$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{6}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{13}}{6};\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}\right\}}}$

k) $10x^2+7x-1=0;\quad a=10;\ b=7;\ c=-1;\quad \Delta=7^2+4\cdot10=89$

$x=\dfrac{-7\pm\sqrt{89}}{20}.\quad \underline{\underline{S=\left\{\dfrac{-7-\sqrt{89}}{20};\dfrac{-7+\sqrt{89}}{20}\right\}}}$

l) $12x^2-11x+5=0;\quad a=12;\ b=-11;\ c=5;\quad \Delta=11^2-4\cdot12\cdot5=-119<0$

donc il n'y a pas de solution : $\underline{\underline{S=\varnothing.}}$

m) $30x^2+23x+4=0;\quad \Delta=23^2-4\cdot30\cdot4=49$

$$x=\frac{-23\pm\sqrt{49}}{60}=\frac{-23\pm7}{60}=\begin{array}{l} / \quad -\dfrac{1}{2} \\ \backslash \quad -\dfrac{4}{15}\end{array}.\qquad \underline{\underline{S=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{4}{15}\right\}}}$$

On aurait aussi pu factoriser : $30x^2+23x+4=(15x+4)\cdot(2x+1)$. En $2^{\text{ème}}$ année, vous verrez comment trouver une telle factorisation, même pour des polynômes de degré supérieur à 2. Pour ces polynômes, les formules de Viète ne sont pas applicables !

Exercice ❷:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.h de la série 5.
$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = x^4 - 1 - 2x \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot (x^2 - 1) = \left(x^2 + 1 - 2x\right) \cdot (x^2 - 1) =$
$= (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) = (x-1)^3 \cdot (x+1)$
Cette expression s'annule pour $x = 1$, pour $x = -1$ et pour aucune autre valeur.
$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 \}}}$

b) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.j de la série 5.
$2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = x^2 \cdot (2x - 3) - 4 \cdot (2x - 3) = \left(x^2 - 4\right) \cdot (2x - 3) = (x+2) \cdot (x-2) \cdot (2x-3)$
Cette expression s'annule pour $x = -2$, pour $x = 2$, pour $x = 1{,}5$ et pour aucune autre valeur.
$\underline{\underline{S = \{ -2 ; 1{,}5 ; 2 \}}}$

c) $\left(x-1\right)^4 - 4 \cdot \left(x-1\right)^2 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.c de la série 5.
$\left(x-1\right)^4 - 4 \cdot \left(x-1\right)^2 = (x-1)^2 \cdot ((x-1)^2 - 4) = (x-1)^2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 4) =$
$= (x-1)^2 \cdot (x^2 - 2x - 3) = (x-1)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+1)$
Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$, pour $x = 3$ et pour aucune autre valeur.
$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 ; 3 \}}}$

d) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.t de la série 5.
$x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - 1) = (x^2 + x + 1)^2 \cdot (x - 1)$
$x^2 + x + 1$ ne s'annule jamais, car son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ est négatif.
L'expression $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ s'annule pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.
$\underline{\underline{S = \{ 1 \}}}$

e) $x^3 - 1 + x^2 - x = 0$ Le membre de gauche a été factorisé dans l'exercice 1.f de la série 5.
$x^3 - 1 + x^2 - x = x^2 \cdot (x+1) - (x+1) = (x+1) \cdot (x^2 - 1) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$
Cette expression s'annule pour $x = -1$, pour $x = 1$ et pour aucune autre valeur.
$\underline{\underline{S = \{ -1 ; 1 \}}}$

f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ C'est une équation appelée bicarrée car elle s'écrit : $\left(x^2\right)^2 - 3\left(x^2\right) + 2 = 0$
Par factorisation : $x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 1) = (x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}) \cdot (x-1) \cdot (x+1)$
Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.
$\underline{\underline{S = \left\{ -\sqrt{2} \,; -1 ; 1 ; \sqrt{2} \right\}}}$

g) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.
Par factorisation : $2x^4 - 5x^2 + 3 = (2x^2 - 3) \cdot (x^2 - 1) = \left(\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{3}\right) \cdot (x-1) \cdot (x+1)$
Cette expression s'annule en exactement 4 valeurs.
$\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} ; -1 ; 1 ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}}}$ On préfère écrire : $\underline{\underline{S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2} ; -1 ; 1 ; \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}}}$

h) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 + x^2 - 3 = (2x^2 + 3)\cdot(x^2 - 1) = (2x^2 + 3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Le facteur $(2x^2 + 3)$ ne s'annule jamais.

Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.

$S = \{ -1 ; 1 \}$

i) $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

Par factorisation : $2x^4 + 7x^2 - 15 = (2x^2 - 3)\cdot(x^2 + 5) = \left(\sqrt{2}\cdot x + \sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot x - \sqrt{3}\right)\cdot(x^5 + 5)$

Le facteur $(x^2 + 5)$ ne s'annule jamais.

Cette expression s'annule en exactement 2 valeurs.

$S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right\}$ On préfère écrire : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2} ; \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$

j) $2x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ C'est une autre équation bicarrée.

En posant $y = x^2$, on obtient l'équation du second degré : $2y^2 + 6y + 5 = 0$.

a = 2 ; b = 6 ; c = 5 ; $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4\cdot 2\cdot 5 = 36 - 40 = -4$

Le discriminant Δ étant négatif, cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. $S = \varnothing$

k) $8x^6 + 65x^3 + 8 = 0$ C'est une équation similaire à une bicarrée.

En posant $y = x^3$, on obtient l'équation du second degré : $8y^2 + 65y + 8 = 0$.

a = 8 ; b = 65 ; c = 8 ; $\Delta = b^2 - 4ac = 65^2 - 4\cdot 8\cdot 8 = 4225 - 256 = 3969 = 63^2$

L'équation en y possède deux solutions : $y_1 = \frac{-65-63}{16} = -8$ et $y_2 = \frac{-65+63}{16} = -\frac{1}{8}$

Donc l'équation en x possède les deux solutions :

$x_1 = \sqrt[3]{y_1} = \sqrt[3]{-8} = -2$ et $x_2 = \sqrt[3]{y_2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

l'équation possède exactement 2 solutions : $S = \left\{ -2 ; -\frac{1}{2} \right\}$

l) $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{5\cdot x}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres de l'équation.

$x^2 + 6 = 5\cdot x \;\Rightarrow\; x^2 - 5\cdot x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)\cdot(x-3) = 0$

On trouve deux solutions. Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S = \{ 2 ; 3 \}$

m) $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$ Pour éliminer les racines, élevons les deux membres au carré.

$x^2 - 2 = 2x^2 - 4x + 1 \;\Rightarrow\; 0 = x^2 - 4x + 3 \;\Rightarrow\; (x-3)\cdot(x-1) = 0$

On trouve deux solutions : $x = 1$ et $x = 3$.

En **vérifiant** pour $x = 1$, on trouve : $\sqrt{1^2 - 2} = \sqrt{2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 1} \;\Rightarrow\; \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

$\sqrt{-1}$ n'étant pas un nombre réel, cette solution n'est pas acceptable.

La seule la solution acceptable est $x = 3$, qui donne : $\sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{2\cdot 3^2 - 4\cdot 3 + 1} \;\Rightarrow\; \sqrt{7} = \sqrt{7}$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{ 3 \}$

n) $\sqrt{x\cdot(x-3)} = \sqrt{8x-x^2}$ Pour éliminer les racines, élevons au carré les deux membres.

$x\cdot(x-3)=8x-x^2 \;\Rightarrow\; x\cdot(x-3)+x^2-8x=0 \;\Rightarrow\; x\cdot(x-3)+x\cdot(x-8)=0 \;\Rightarrow\; x\cdot(2x-11)=0$

On trouve deux solutions : $x = 0$ et $x = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S = \{\ 0\,;5{,}5\ \}$

o) $2+\sqrt{2x+4} = x \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2x+4} = x-2$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.

$2x+4=x^2-4x+4 \;\Rightarrow\; 0=x^2-6x \;\Rightarrow\; x\cdot(x-6)=0$

On trouve deux solutions : $x = 0$ et $x = 6$.

En **vérifiant** pour $x = 0$, on trouve : $\sqrt{2\cdot 0+4} = 0-2 \;\Rightarrow\; 2=-2$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x = 6$, qui donne : $\sqrt{2\cdot 6+4} = 6-2 \;\Rightarrow\; \sqrt{16}=4$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{\ 6\ \}$

p) $x+\sqrt{x+5} = 7 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x+5} = 7-x$ Pour éliminer le racine, élevons au carré les deux membres.

$x+5=x^2-14x+49 \;\Rightarrow\; 0=x^2-15x+44 \;\Rightarrow\; (x-11)\cdot(x-4)=0$

On trouve deux solutions : $x = 4$ et $x = 11$.

En **vérifiant** pour $x = 11$, on trouve : $\sqrt{11+5} = 7-11 \;\Rightarrow\; 4=-4$, l'égalité est fausse !

En élevant au carré on perd le signe des deux membres, ce qui introduit des solutions supplémentaires.

La seule la solution acceptable est $x = 4$, qui donne : $\sqrt{4+5} = 7-4 \;\Rightarrow\; \sqrt{9}=3$.

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S = \{\ 4\ \}$

q) $\dfrac{1}{x+3} = x-3$ Multiplions les deux membres par : $(\ x + 3\ )$

$1=(x-3)\cdot(x+3) \;\Leftrightarrow\; 1=x^2-9 \;\Leftrightarrow\; x^2=10$

On trouve deux solutions : $x = \sqrt{10}$ et $x = -\sqrt{10}$.

Il faut **vérifier** qu'elles satisfont l'équation de départ ! : $S = \left\{\ -\sqrt{10}\,;\sqrt{10}\ \right\}$

r) $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-3}=0$ Multiplions les deux membres par : $(\ x-1\ )\cdot(\ x-3\ )$

$(x-3)^2-(x-1)^2=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-6x+9-(x^2-2x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; -4x+8=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$

Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S = \{\ 2\ \}$

s) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{35}$ Multiplions les deux membres par : $35\cdot(\ x-2\ )\cdot(\ x+2\ )$

$35\cdot(x+2)-35\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x+2) \;\Leftrightarrow\; 35\cdot 4=x^2-4 \;\Leftrightarrow\; x^2-4-35\cdot 4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2-144=0$

Il faut **vérifier** que les solutions satisfont l'équation de départ ! : $S = \{\ -12\,;12\ \}$

t) $\dfrac{x+5}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $(x-1)\cdot(x+1)$

$(x+5)\cdot(x+1)-2\cdot(x-1)=4 \iff x^2+6x+5-2x+2-4=0 \iff x^2+4x+3=0 \iff (x+3)\cdot(x+1)=0$

On trouve deux solutions : $x=-1$ et $x=-3$.

$x=-1$ n'est pas une solution, car elle fait intervenir une division par 0 !

Il n'y a donc qu'une seule solution : $S=\{-3\}$

u) $\dfrac{x-7}{x^2-5x+6}+\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{1}{x-2}=0$ Remarquons que x^2-5x+6 se factorise en $(x-3)\cdot(x-2)$

Multiplions les deux membres par : $(x-3)\cdot(x-2)$

$x-7+2\cdot(x-2)+(x-3)=0 \iff x-7+2x-4+x-3=0 \iff 4x-14=0 \iff x=\dfrac{7}{2}=3{,}5$

Il faut **vérifier** que la solution satisfait l'équation de départ ! : $S=\{3{,}5\}$

v) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{x}{x-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}$ Multiplions les deux membres par : $x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

$(x-1)+x^2\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)+2x \iff x-1+x^3+x^2=x^3-x+2x \iff$

$x^2-1=0 \iff (x-1)\cdot(x+1)=0$

On trouve deux solutions : $x=-1$ et $x=1$.

On voit qu'aucune des deux solutions n'est acceptable, car elles font intervenir des divisions par 0.

L'ensemble des solutions est : $S=\varnothing$. On peut aussi noter : $S=\{\ \}$

Comment des solutions non valides peuvent-elles apparaître ?

Il *semble* pourtant qu'on n'utilise que les trois règles de simplifications énoncées en VII.1.
En multipliant au point par $x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, on multiplie par zéro si $x=0$, si $x=1$ ou si $x=-1$.
Or multiplier par zéro n'est pas une règle de simplification valide et peut amener de nouvelles solutions !
Cela peut ajouter des solutions non valides. (Cela n'enlève pas de solutions correctes).

Voici un autre exemple plus simple :

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$ En multipliant par x les deux membres, on obtient : $\sqrt{x}=x^2$.

$x=0$ est une solution de $\sqrt{x}=x^2$, mais pas de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$. C'est en multipliant par x que la solution $x=0$ est apparue.

Par contre $x=1$ est l'unique solution correcte de l'équation.