Equations à une inconnue - série n° 7 **Corrigé**

Donnez l'ensemble des solutions réelles des équations suivantes :

a)	b)	c)
$x\left(x+3\right) = x^2 + x$ $x^2+3x=x^2+x$ $2x=0$ $x=0 \Rightarrow S=\{0\}$	$2x^2+\frac{9}{8}=3x$ $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=0$ $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=0$ $x-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$	$\frac{x^2}{3}+\frac{12}{25}=\frac{4x}{5}$ $\frac{25x^2+36}{75}=\frac{60x}{75}$ $25x^2+36=60x$ $25x^2-60x+36=0$ $\left(5x-6\right)^2=0$ $5x-6=0 \Rightarrow S=\left\{\frac{6}{5}\right\}$

d) Domaine = $\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ $\frac{3}{1-x}-2=\frac{5}{x-3}$ $\frac{3\cdot(x-3)-2\cdot(1-x)\cdot(x-3)}{(1-x)\cdot(x-3)}=\frac{5\cdot(1-x)}{(1-x)\cdot(x-3)}$ $3x-9-2\cdot(x-x^2-3+3x)=5-5x$ $3x-9+2x^2-8x+6=5-5x$ $2x^2-8=0$ $2\cdot(x^2-4)=0$ $2\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow S=\{\pm 2\}$	**e) Domaine =** $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{7};\frac{2}{5}\right\}$ $\frac{10}{7x-3}=\frac{8}{5x-2}$ $50x-20=56x-24$ $-6x=-4$ $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$
f) Domaine = $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4}{2x^2-2x}=\frac{4-x}{2x}$ $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4}{2x\cdot(x-1)}=\frac{4-x}{2x}$ $\frac{(x+2)\cdot 2x-4}{2x\cdot(x-1)}=\frac{(4-x)\cdot(x-1)}{2x\cdot(x-1)}$ $2x^2+4x-4=4x-x^2-4+x$ $3x^2-x=0$ $x\cdot(3x-1)=0 \Rightarrow S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$ **<u>car 0 n'est pas acceptable</u> :** **vérifier cette solution donne certains dénominateurs nuls; or, il est impossible de diviser par zéro !**	**g) Domaine =** $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{5}{2}$ $\frac{x\cdot 2\cdot x}{2\cdot x\cdot(x+1)}+\frac{(x+1)\cdot 2\cdot(x+1)}{x}=\frac{5\cdot x\cdot(x+1)}{2\cdot x\cdot(x+1)}$ $2x^2+2\cdot(x^2+2x+1)=5x^2+5x$ $-x^2-x+2=0$ $x^2+x-2=0$ $(x+2)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow$ $S=\{-2\ ;1\}$ **on a contrôlé que ces deux valeurs n'annulent aucun dénominateur**

h) $3x^3-9x^2+9x-27 = 0 \qquad \div \text{par } 3:$ $x^3-3x^2+3x-9 = 0$ $x^2\cdot(x-3)+3\cdot(x-3)=0$ $(x-3)\cdot(x^2+3)=0 \Rightarrow S=\{3\}$	**i)** $x-2 = \sqrt{x^2-x+1}$ $(x-2)^2 = x^2-x+1$ $x^2-4x+4=x^2-x+1$ $-3x=-3 \Rightarrow x=1$ **Vérification :** $1-2 = \sqrt{1-1+1}$ **est faux :** **1 n'est qu'une <u>solution supplémentaire amenée par l'élévation au carré</u>.** $S=\{\ \}$
j) $\sqrt{6x+1} = \sqrt{7x+4}$ $6x+1=7x+4$ $-3=x$ **Vérification :** $\sqrt{-18+1} = \sqrt{-21+4}$ **est faux puisque ces deux racines n'existent pas dans** $\mathbb{R}$ **:** **-3 n'est qu'une <u>solution supplémentaire amenée par l'élévation au carré</u>.** $S=\{\ \}$	**k)** $\sqrt{x^2+1}-x=1$ **Elever au carré maintenant serait extrêmement maladroit.** $\sqrt{x^2+1} = x+1$ **Elévation au carré (racine isolée) :** $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=(1+x)^2$ $x^2+1=1+2x+x^2$ $0=2x$ $x=0$ **Vérification :** $\sqrt{0^2+1}-0=1$ **est correct** **Donc** $S=\{0\}$
l) $\sqrt{2x^2-4x+9} = 2x-3$ $2x^2-4x+9=4x^2-12x+9$ $-2x^2+8x=0$ $-2\cdot x\cdot(x-4)=0 \Rightarrow$ $x=0 \quad \text{ou} \quad x=4$ **Vérification :** **1)** $\sqrt{2\cdot 0^2-4\cdot 0+9} = 2\cdot 0-3$ **est faux** **2)** $\sqrt{2\cdot 4^2-4\cdot 4+9} = 2\cdot 4-3$ **est correct** **Donc** $S=\{4\}$, **0 n'étant qu'une <u>solution supplémentaire amenée par l'élévation au carré</u>.**	**m)** $3x^2(x+3) = 4x+12$ $3x^2(x+3)-4x-12=0$ $3x^2(x+3)-4\cdot(x+3)=0$ $(x+3)\cdot(3x^2-4)=0$ $(x+3)\cdot(x\sqrt{3}-2)\cdot(x\sqrt{3}+2)=0$ $x+3=0 \quad \text{ou} \quad x\sqrt{3}-2=0 \quad \text{ou} \quad x\sqrt{3}+2=0$ $\Rightarrow S=\left\{-3;\ \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\left\{-3;\ \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$
n) $\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-1}=\pm 2$ $\pm 2\cdot(x-1)=1$ (produit en croix) $2x-2=1 \quad \text{ou} \quad -2x+2=1$ $x=1{,}5 \quad \text{ou} \quad x=0{,}5$ **les deux solutions sont acceptables :** $S=\{1{,}5\ ;\ 0{,}5\}$	**o)** $(2x-5)\cdot(3x+21)\cdot(7x^2+2)=0$ $S=\{2{,}5\ ;\ -7\}$ **Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il suffit que l'un des facteurs soit nul.** **Pour trouver <u>toutes</u> les solutions, il faut envisager <u>toutes</u> les possibilités.** **La dernière parenthèse, toujours strictement positive, ne donne aucune solution.**

p) Domaine = $\mathbb{R}\setminus\{10\}$ $\frac{(x^2-100)\cdot(x^2+25)}{x-10}=0$ $(x^2-100)\cdot(x^2+25)=0$ $(x-10)\cdot(x+10)\cdot(x^2+25)=0\Rightarrow$ $x=10$ (hors du domaine) ou $x=-10$ $S=\{-10\}$	**r)** $x^2+2x=1$ $x^2+2x-1=0$ astuce : $x^2+2x\underbrace{+1-1}_{0}-1=0$ $(x+1)^2-2=0$ $(x+1)^2=2$ $x+1=\pm\sqrt{2}$ $x=-1\pm\sqrt{2}\Rightarrow S=\{-1\pm\sqrt{2}\}$
s) Domaine = $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;0\}$ $\frac{4}{x}=\frac{x^2}{x^2+x}-\frac{x}{x+1}$ $\frac{4}{x}=\frac{x^2}{x\cdot(x+1)}-\frac{x}{x+1}$ $\frac{4\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)}=\frac{x^2-x\cdot x}{x\cdot(x+1)}$ $4\cdot(x+1)=0,\quad x=-1$ (hors du domaine) $\Rightarrow$ S=$\{\ \}$	**t)** $x^2-12x+36=-100$ $(x-6)^2=-100$ $\Rightarrow S=\{\ \}$ **car :** **le premier membre est positif ou nul,** **alors que le second est toujours négatif.** **Cette égalité est impossible à satisfaire.**
u) $x\cdot(x-7)=x^2+21$ $x^2-7x=x^2+21$ $-7x=21\Rightarrow S=\{-3\}$	**v)** $(2x-10)\cdot(x^2-1)=(x-5)\cdot(3x+3)$ $(2x-10)\cdot(x^2-1)-(x-5)\cdot(3x+3)=0$ $2\cdot(x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-1)-(x-5)\cdot3\cdot(x+1)=0$ $(x-5)\cdot(x+1)\cdot[2\cdot(x-1)-3]=0$ $(x-5)\cdot(x+1)\cdot(2x-5)=0\Rightarrow S=\{5;-1;\ 2,5\}$
w) $4x^4(x-2)=\ x^3(4-2x)$ $4x^4(x-2)-\ x^3\cdot2\cdot(2-x)=0$ $4x^4(x-2)+\ x^3\cdot2\cdot(-2+x)=0$ $2x^3\cdot(x-2)\cdot(2x+1)=0\Rightarrow$ $S=\{\ 0\ ;\ 2\ ;\ -0,5\ \}$	**x)** $x^2-25=(x+5)\cdot(4x-6)$ $x^2-25-(x+5)\cdot(4x-6)=0$ $(x-5)\cdot(x+5)-(x+5)\cdot(4x-6)=0$ $(x+5)\cdot[(x-5)-(4x-6)]=0$ $(x+5)\cdot[-3x+1]=0\Rightarrow S=\{-5;1/3\}$
y) $(x^2-4)\cdot(x+5)\cdot(x+1)=(x^2+10x+25)\cdot(x-2)$ $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+5)\cdot(x+1)=(x+5)^2\cdot(x-2)$ $(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+5)\cdot(x+1)-(x+5)^2\cdot(x-2)=0$ $(x-2)\cdot(x+5)\cdot[(x+2)\cdot(x+1)-(x+5)]=0$ $(x-2)\cdot(x+5)\cdot[x^2+3x+2-x-5]=0$ $(x-2)\cdot(x+5)\cdot[x^2+2x-3]=0$ $(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-1)\cdot(x+3)=0\Rightarrow S=\{2;-5\ ;1;-3\}$	**z)** $2x^3-x^2+6x-3=x^3-5x^2+3x-15$ $x^3+4x^2+3x+12=0$ $x^2\cdot(x+4)+3\cdot(x+4)=0$ $(x+4)\cdot(x^2+3)=0$ $\Rightarrow S=\{-4\}$