1. La trajectoire d'une étoile filante.

Un astéroïde de masse $m = 350$ [kg] s'approche de la Terre pour lui tomber dessus en se déplaçant dans un plan (x ; z). Il subit deux forces : $\vec{F}_G = -\dfrac{G \cdot m \cdot M_T}{d^3} \cdot \vec{r}$ et $\vec{F}_{frot} = -k_{frot} \cdot V \cdot \vec{V}$

où : $\vec{r} = < x \ ; \ z >$ représente la position de l'astéroïde, $\vec{V} = < V_x \ ; \ V_z >$ sa vitesse,

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{N \cdot kg^2}{m^2} \right]$; $k_{frot} = 2 \cdot 10^{-7} \left[\dfrac{N \cdot s^2}{m^2} \right]$

$M_T = 5.9742 \cdot 10^{24} [kg]$. Le rayon de la Terre vaut $R_T = 6.371 \cdot 10^6 [m]$.

1.1 Faites un **dessin,** en indiquant votre choix du sens positif de l'axe.
1.2 À partir de la loi fondamentale de la dynamique (2ème loi de Newton), écrivez l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la vitesse et de la position de l'objet en fonction du temps.
1.3 Dans Scilab, programmez la résolution de ce système d'équations différentielles avec **la méthode du système ode(...)**, pour répondre aux points suivants :
!!! Indiquez votre démarche, **justifiez**.
1.3a Recopier sur votre feuille le contenu de la fonction "function z = f(x,y)", jusqu'au "endfunction".
1.4 Pour une condition initiale de $\vec{r}_0 = < x_0 \ ; \ z_0 > = < 0 \ ; \ 3 \cdot R_T >$ et $\vec{V}_0 = < 3000 \ ; \ 0 > [m/s]$ et un temps variant de 0 à 40'000 secondes, tracez la trajectoire de cet astéroïde.

---

2. Le problème à deux corps.

Deux corps de masse $3 \cdot 10^{14} [kg]$ chacun sont dans l'espace et ne subissent que l'effet gravitationnel de l'un sur l'autre. Ils sont isolés de toute autre influence.
Chaque corps ne se déplace que dans un plan (x ; y), la coordonnée z restant fixe.
Il y a donc 8 variables : x_1, v_{x1}, y_1, v_{y1}, x_2, v_{x2}, y_2, v_{y2}.
Le premier corps subit la force : $\vec{F}_1 = -coef \cdot \vec{r}_1$.

Le deuxième corps subit la force : $\vec{F}_2 = -coef \cdot \vec{r}_2$.

Avec : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; $coef = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{d^3}$; $G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \left[\dfrac{N \cdot kg^2}{m^2} \right]$;

$\vec{r}_1 = < (x_1 - x_2) \ ; \ (y_1 - y_2) >$ et $\vec{r}_2 = < (x_2 - x_1) \ ; \ (y_2 - y_1) >$.

Les conditions initiales sont :
$x_1 = -100$ [m] ; $v_{x1} = 1$ [m/s] ; $y_1 = 0$ [m] ; $v_{y1} = 6$ [m/s]
$x_2 = 100$ [m] ; $v_{x2} = 0$ [m/s] ; $y_2 = 0$ [m] ; $v_{y2} = -6$[m/s];

2.1 Faites un **dessin,** en indiquant votre choix du sens positif des axes.
2.2 Les lois de la physique permettent décrire l'équation différentielle d'évolution de cet objet. Écrivez ces équations différentielles.
2.3 Dans Scilab, programmez la résolution de ce système d'équations différentielles avec **la méthode du système ode(...).**
2.4 Pour un temps variant de 0 à 125 secondes, tracez la trajectoire de chacun des deux corps, de couleurs différentes.

---

3. Les lapins et les renards. Les équations de Lotka-Volterra.

Voici un modèle simplifié d'un écosystème en biologie.
Dans un écosystème, il y a des lapins, qui se nourrissent de la végétation ambiante et des renards, qui se nourrissent exclusivement de lapins.

° Le taux de naissance des lapins est proportionnel au nombre de lapins vivant.
° Le taux de mortalité des lapins est proportionnel au nombre de lapins vivant et au nombre de renards vivants.
° Le taux de naissance des renards est proportionnel au nombre de renards vivant et au nombre de lapins vivant.
° Le taux de mortalité des renards est proportionnel au nombre de renards vivants.

Les 4 coefficients de proportionnalité sont des paramètres constants du modèle.
Voici des paramètres intéressants :

	Taux de naissance [1 / année]	Taux de mortalité [1 / année]	quantité initiale
Lapins	0,15	0,00040	150
Renards	0,00035	0,20	100

3.1 Écrivez ces équations différentielles régissant l'évolution de la population de lapins et de celle des renards.
3.2 Dans Scilab, programmez la résolution de ce système d'équations différentielles avec **la méthode du système ode(...).**
3.3 Jouez un peu avec cette simulation, qu'observez-vous ?
3.4 Quelle est l'influence des changements des paramètres ?

Ce modèle se nomme aussi "**modèle proie-prédateur**" et est caractérisé par les **équations de Lotka-Volterra**.

---

4. Le problème à trois corps

Reprenez le problème à deux corps, pour en ajouter un troisième.
Le tout tourne dans un espace à deux dimensions, pour simplifier.
Écrivez pour cela une nouvelle fonction.
Données :
La masse des corps est : $m_1 = 3{,}0 \cdot 10^{14}$ [kg] ; $m_2 = 3{,}0 \cdot 10^{14}$ [kg] ; $m_3 = 3{,}0 \cdot 10^{12}$ [kg].
Positions initiales : $(\boldsymbol{x}_1 ; \boldsymbol{y}_1)$= (-50 ; 0) [m] ; $(\boldsymbol{x}_2 ; \boldsymbol{y}_2)$= (50 ; 0) [m] ; $(\boldsymbol{x}_3 ; \boldsymbol{y}_3)$= (-250 ; 0) [m].
Vitesses initiales : $\boldsymbol{v}_1 = (3{,}0 \cdot 10^{14}$ [kg] ; $m_2 = 3{,}0 \cdot 10^{14}$ [kg] ; $m_3 = 3{,}0 \cdot 10^{12}$ [kg].
$(\boldsymbol{v}_{x1} ; \boldsymbol{v}_{y1})$= (0 ; 9) [m/s] ; $(\boldsymbol{v}_{x2} ; \boldsymbol{v}_{y2})$ (0 ; -9.15) [m/s] ; $(\boldsymbol{v}_{x3} ; \boldsymbol{v}_{y3})$= (0 ; 12) [m/s].
Le troisième corps est donc beaucoup plus léger et tourne autour des deux autres.
Temps entre 0 et 2000 [s].

On peut imaginer ajouter beaucoup de corps, pour voir l'évolution, comme cela est fait pour simuler la naissance d'un système solaire ou l'évolution d'une galaxie.
