Exercice 5 : Calcul numérique de la racine carrée.
Le but est de calculer la racine carrée d'un nombre, en utilisant uniquement les 4 opérations + - * /

Montrons que "l'erreur" c'est-à-dire "la différence entre l'approximation et la valeur exacte" converge quadratiquement.
Cela signifie que l'erreur à une itération est proportionnelle au carré de l'erreur de l'itération précédente.

On a $\boxed{r_{n+1}=\frac{r_n}{2}+\frac{a}{2r_n}}$, r_n est une approximation de $\sqrt{a}$.

<u>Établissons le lien entre : $r_{n+1}-\sqrt{a}$ et $r_n-\sqrt{a}$.</u>

$$r_{n+1}-\sqrt{a} \;=\; \frac{r_n-\sqrt{a}}{2}+\frac{a-r_n\cdot\sqrt{a}}{2r_n} \;=\; \frac{r_n^2-r_n\cdot\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2-r_n\cdot\sqrt{a}}{2r_n} \;=\; \frac{r_n^2-2r_n\cdot\sqrt{a}+(\sqrt{a})^2}{2r_n}$$

On obtient donc la relation : $\boxed{r_{n+1}-\sqrt{a} \;=\; \frac{1}{2r_n}\cdot\left(r_n-\sqrt{a}\right)^2}$.

L'erreur de la $n+1$ ième itération est (environ) proportionnelle au carré de l'erreur de la n ième itération.

Si une erreur est de $\frac{1}{10}$, la suivante est de $\frac{1}{100}$, puis la suivante de $\frac{1}{10'000}$, puis $\frac{1}{100'000'000}$.
On voit que l'erreur tend très rapidement vers 0.

Exercice 6 : Calcul numérique de la racine cubique.
Le but est de calculer la racine cubique d'un nombre, en utilisant uniquement les 4 opérations + - * /

Une méthode (non optimale) pour calculer la racine cubique est : $r_{n+1}=\frac{r_n}{2}+\frac{a}{2r_n^2}$.

Cette méthode converge linéairement vers la racine cubique de a.

Une méthode améliorée est : $\boxed{r_{n+1}=\frac{2r_n}{3}+\frac{a}{3r_n^2}}$, qui converge quadratiquement vers $\sqrt[3]{a}$.

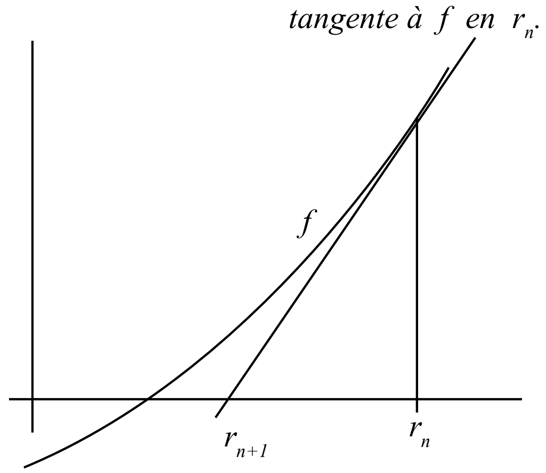
<u>Établissons le lien entre : $r_{n+1}-\sqrt[3]{a}$ et $r_n-\sqrt[3]{a}$.</u>

$$r_{n+1}-\sqrt[3]{a} \;=\; \frac{2r_n-2\sqrt[3]{a}}{3}+\frac{a-r_n^2\cdot\sqrt[3]{a}}{3r_n^2} \;=\; \frac{2r_n^3-3r_n^2\cdot\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^3}{3r_n^3} \;=\; \frac{\left(2r_n+\sqrt[3]{a}\right)\cdot\left(r_n^2-2r_n\cdot\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2\right)}{3r_n^3} \;=$$

On obtient donc la relation : $\boxed{r_{n+1}-\sqrt[3]{a} \;=\; \frac{\left(2r_n+\sqrt[3]{a}\right)}{3r_n^3}\cdot\left(r_n-\sqrt[3]{a}\right)^2}$.

L'erreur de la $n+1$ ième itération est (environ) proportionnelle au carré de l'erreur de la n ième itération.

Ce qui précède ne sont que des cas particulier d'une méthode plus générale, appelée **Méthode de Newton**.
Illustration de la méthode sur un graphique.



On cherche un zéro de la fonction *f*.
Si r_n est une approximation du zéro cherché, en traçant une tangente à f en r_n et en cherchant le zéro de cette tangente, on trouve une meilleure approximation r_{n+1} du zéro cherché.
L'équation de la tangente est :
$y = f'(r_n)\cdot(x-r_n)+f(r_n)$

Le zéro vaut : $x = r_n - \dfrac{f(r_n)}{f'(r_n)}$

Donc la meilleure approximation est :

$$\boxed{r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)}}$$

Juste par curiosité, appliquons cette méthode pour calculer la racine carrée d'un nombre a.
$f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$. $x = \sqrt{a}$ est bien un zéro de la fonction *f*.

$r_{n+1} = r_n - \dfrac{r_n^2 - a}{2r_n} = \dfrac{r_n}{2} + \dfrac{a}{2r_n}$, qui est bien la méthode décrite dans l'exercice 5.

Appliquons cette méthode pour calculer la racine cubique d'un nombre a.
Si $f(x) = x^3 - a$, $f'(x) = 3x^2$. $x = \sqrt[3]{a}$ est bien un zéro de la fonction *f*.

$r_{n+1} = r_n - \dfrac{r_n^3 - a}{3r_n^2} = \dfrac{2r_n}{3} + \dfrac{a}{3r_n^2}$, qui est bien la méthode décrite dans l'exercice 6.

Montrons que la convergence de la méthode de Newton est quadratique. L'erreur d'une étape est (environ) proportionnelle au carré de l'erreur de l'étape précédente.
Notons r_∞ le zéro que l'on cherche de la fonction *f*.

Remarquons que : $f(r_\infty) = f(r_n) + f'(r_n)\cdot(r_\infty - r_n) + \dfrac{1}{2}\cdot f''(\xi)\cdot(r_\infty - r_n)^2$ pour ξ dans $[r_\infty ; r_n]$.

Donc : $f(r_n) = -f'(r_n)\cdot(r_\infty - r_n) - \dfrac{1}{2}\cdot f''(\xi)\cdot(r_\infty - r_n)^2$, car $f(r_\infty) = 0$.

$$r_{n+1} - r_\infty = (r_n - r_\infty) - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = (r_n - r_\infty) + \frac{f'(r_n)\cdot(r_\infty - r_n)}{f'(r_n)} + \frac{f''(\xi)}{2f'(r_n)}\cdot(r_n - r_\infty)^2$$

On obtient donc la relation : $\boxed{r_{n+1} - r_\infty = \dfrac{f''(\xi)}{2f'(r_n)}\cdot(r_n - r_\infty)^2}$.

L'erreur de la $n+1$ ième itération est (environ) proportionnel au carré de l'erreur de la n ième itération.